

SPIELTHEORIE

- Modellbildung zur strategischen Entscheidungsfindung
- Im Spannungsfeld zwischen Kooperation und Wettbewerb

Prof. Dr. Martin Schottenloher

Mathematisches Institut, LMU München

München, 12. Juli 2007 - Studienstiftung

Inhalt

1. Spieltheorie – interaktive Entscheidungstheorie
2. Beispiel: Das Einsatzspiel
3. Normalform und Nash-Gleichgewicht
4. Spiele in extensiver Form (Skizze)
5. Experimentelle Spieltheorie (Skizze)
6. Iterierte Spiele, evolutorische Spiele (Skizze)
7. Anwendung: Gestaltung einer Kooperation (Beispiel)

Inhalt

1. Spieltheorie – interaktive Entscheidungstheorie
2. Beispiel: Das Einsatzspiel
3. Normalform und Nash-Gleichgewicht
4. Spiele in extensiver Form (Skizze)
5. Experimentelle Spieltheorie (Skizze)
6. Iterierte Spiele, evolutorische Spiele (Skizze)
7. Anwendung: Gestaltung einer Kooperation (Beispiel)

1. Spieltheorie - Einleitung

- Die Spieltheorie
- ... ist eine **mathematische Disziplin**.
- ... hat ihren Ursprung tatsächlich in der **strategischen Analyse** von Spielen wie Schach u.a.
- ... hat in ihrer modernen Ausprägung allerdings wenig mit Spielen zu tun. Stattdessen:

1. Spieltheorie - Einleitung

- Die Spieltheorie analysiert das **Entscheidungsverhalten** von Akteuren in Situationen, in denen der erzielbare Nutzen eines jeden Einzelnen von den Entscheidungen der anderen Beteiligten abhängt. Also:
- Entscheidungen nach **rationaler Analyse** unter Berücksichtigung der möglichen Entscheidungen der anderen, insofern **interaktiv**.
- Ergebnis der Analyse: Optimale Entscheidungen gibt es und sie können **berechnet** werden!

1. Spieltheorie - Einleitung

- Ziele der Spieltheorie:
 - Sichere Voraussagen bei Vorgabe der Spielregeln: Welche Entscheidungen werden gefällt? Was ist die **beste Strategie**?
 - Änderung der Rahmenbedingungen (d.h. der Spielregeln), um gegebenenfalls zu gewünschten Resultaten zu kommen: **Gestaltung**
 - ... mit **mathematischen Methoden**: Formeln, Gleichungen, Zahlen.

1. Spieltheorie - Einleitung

- *Game Theory focusses on finding the right strategy and making the right decisions.*
(Brandenburger / Nalebuff in ‚Co-opetition‘)

1. Spieltheorie - Einleitung

- *Game Theory focusses on finding the right strategy and making the right decisions.* (Brandenburger / Nalebuff in *Co-opetition*)
- Anwendungen in: **Ökonomie**, Sozialwissenschaften, Psychologie, Biologie, Physik, Chemie, Mathematik, Informatik, **Politik**, ...

1. Spieltheorie - Einleitung

Nach diesen Ausführungen ein erstes Spiel:

Das 80%-Spiel:

- **Jeder** Teilnehmer wählt eine natürlichen Zahl x zwischen 0 und 100 und gibt diese bekannt.
- **Gewonnen** hat, wer mit seiner gewählten Zahl 80 % des Durchschnitts der genannten Zahlen am nächsten kommt.
- Welche Zahl wählen Sie?
Zum Beispiel bei einem Einsatz von 1 €.

Inhalt

1. Spieltheorie – interaktive Entscheidungstheorie
2. Beispiel: Das Einsatzspiel
3. Normalform und Nash-Gleichgewicht
4. Spiele in extensiver Form (Skizze)
5. Experimentelle Spieltheorie (Skizze)
6. Iterierte Spiele, evolutorische Spiele (Skizze)
7. Anwendung: Gestaltung einer Kooperation (Beispiel)

2. Einsatzspiel

Beispiel: Ausführliche Beschreibung und Analyse eines konkreten Modells „**Einsatzspiel**“

Das
Spiel
und
die
Regeln:

Vier Spieler können jeweils bis zu 1000 € in einen gemeinsamen „Topf“ investieren.

Die Summe der Investitionen wird verdoppelt und zu gleichen Teilen auf die vier Spieler verteilt.

Was ist die richtige Strategie?

- für einen optimalen Gewinn?

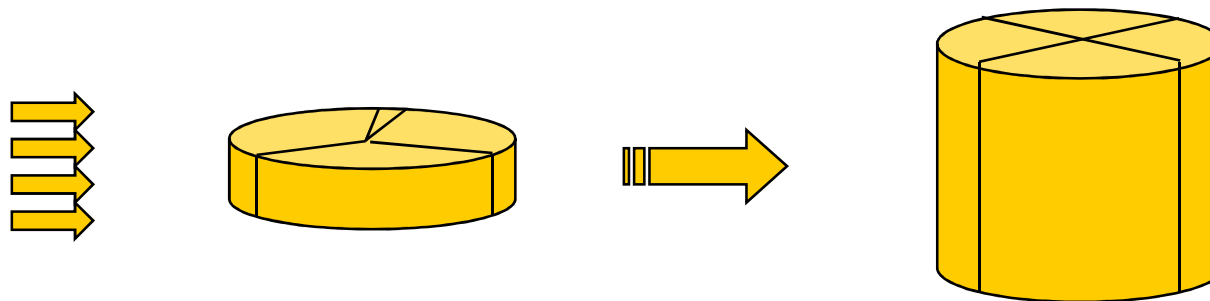
2. Einsatzspiel

Das
Spiel
und
die
Regeln:

Vier Spieler können jeweils bis zu 1000 € in einen gemeinsamen „Topf“ investieren.

Die Summe der Investitionen wird verdoppelt und zu gleichen Teilen auf die vier Spieler verteilt.

Typisch für Kooperationen, Vereine, Partnerschaften!



2. Einsatzspiel

- Was ist die optimale Strategie? Was wählen Sie?
- Szenario 1: Jeder der vier Spieler setzt 1.000 € ein. Also stehen $4 \times 1.000 \times 2 = 8000$ zur Verteilung an, jeder Spieler erhält 2.000 € und hat einen

Gewinn von 1.000 €.

2. Einsatzspiel

Szenario 2: Nur ein Spieler – Spieler 1 – setzt 1.000 €, die anderen setzen gar nichts ein. Es werden 2.000 € verteilt:

- Spieler 1 erhält 500 € und hat einen **Verlust** von 500 €.
- Die anderen drei Spieler machen je 500 € **Gewinn**.

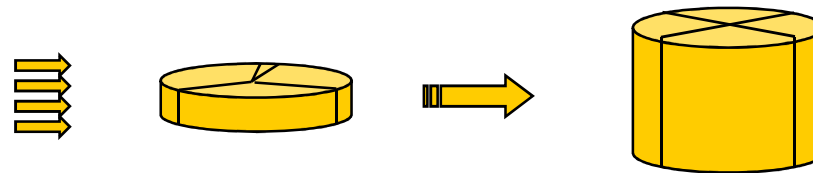
2. Einsatzspiel. Die Formel:

- Der Einsatz von Spieler 1 werde mit e bezeichnet, die Summe der Einsätze der restlichen drei Spieler mit s .
- Dann ist $s + e$ der Gesamteinsatz, der nach den Regeln verdoppelt ($= 2(s + e)$) und auf die vier Spieler gleichmäßig verteilt wird.
- Jeder erhält also $2(s + e)/4 = 1/2(s + e)$ €.
- Der **Gewinn (Nutzen)** $u(e)$ von Spieler 1 in Abhängigkeit vom Einsatz e ist also $u(e) = 1/2s + 1/2e - e = 1/2s - 1/2e = 1/2(s - e)$:

$$u(e) = 1/2(s - e)$$

2. Einsatzspiel

Die beste Strategie in diesem Spiel:



Gar nichts investieren!

2. Einsatzspiel

Paradox?

- Wenn jeder Spieler sich für diese rationale Strategie (des **Trittbrettfahrers**) entscheidet, ist sein Gewinn 0, obwohl jeder bei einer **kooperativen Strategie** 1.000 € gewinnen könnte, nämlich wenn alle den vollen Einsatz investierten.
- Spannung: Wettbewerb $\leftarrow \backslash / \rightarrow$ Kooperation

2. Einsatzspiel

- Das Beispiel ist sehr einfach und es muss für ernste Anwendungen modifiziert werden!
- Aber es zeigt: Ohne zusätzliche Strukturen oder Bindungen (d.h. Regeln des Spiels) kann unter *rationalen* Gesichtspunkten *gar keine Kooperation* entstehen.
- Beispiel *Brutal*: Jeder wird gezwungen, vollen Einsatz zu geben. (Mafia)

2. Einsatzspiel

- Das Beispiel „Einsatzspiel“ ist eine Variante des bekannten ***Gefangenendilemmas***.

Inhalt

1. Spieltheorie – interaktive Entscheidungstheorie
2. Beispiel: Das Einsatzspiel
3. Normalform und Nash-Gleichgewicht
4. Spiele in extensiver Form (Skizze)
5. Experimentelle Spieltheorie (Skizze)
6. Iterierte Spiele, evolutorische Spiele (Skizze)
7. Anwendung: Gestaltung einer Kooperation (Beispiel)

3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

In diesem Abschnitt werden Grundbegriffe bereitgestellt.

- Spieltheorie als Teil der **Mathematik** am Beispiel der Spiele in **Normalform**. Der einfachsten Form, Spiele mathematisch darzustellen.

3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

- Ein Spiel in **Normalform**, besteht aus
 - einer endlichen Menge M von **Spielern**,
 - zu jedem Spieler k aus M eine Menge S_k von **Strategien** und
 - zu jedem Spieler k aus M eine **Nutzenfunktion** u_k , die jeder **Strategiekombination** $s = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ mit s_k aus S_k eine reelle Zahl $u_k(s)$ festlegt (das ist das ‚Gewinnergebnis‘ im Falle, dass s gespielt wird).

3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

- Spielverlauf:
- Jeder Spieler entscheidet sich in seinem Zug für eine Strategie s_k aus seiner Strategiemenge S_k , ohne zu wissen, was die anderen ziehen.
- Damit ist das Spiel auch schon zuende.
- Dann ist $s = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ die gespielte Strategiekombination und für jeden Spieler k ist $u_k(s)$ sein Nutzen, also das Spielergebnis.

3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

Beispiel Einsatzspiel:

- $M = \{1,2,3,4\}$ ist die Menge der Spieler
- Die Strategiemengen sind für jeden gleich:
 $S_k = S = \{0,1,2, \dots, 1.000\}$

- Die Nutzenfunktion ist, wie oben gezeigt

$u_k(s_1, s_2, s_3, s_4) = \frac{1}{2} (s_1 + s_2 + s_3 + s_4) - s_k,$
also für Spieler 1 :

$$u_1(s_1, s_2, s_3, s_4) = \frac{1}{2} (s_2 + s_3 + s_4) - \frac{1}{2} s_1 \dots$$

3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

Beste Antwort:

- Im Falle von 2 Spielern $M = \{1,2\}$:
- Vorgegeben sei s_2 .

Beste Antwort auf s_2 ist jede Strategie s_1^* die stets

$$u_1(s_1^*, s_2) > u_1(s_1, s_2) \text{ oder } u_1(s_1^*, s_2) = u_1(s_1, s_2)$$

für beliebige Strategien s_1 erfüllt.

3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

Nash-Gleichgewicht:

- Im Falle von 2 Spielern $M = \{1,2\}$:
- $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ ist Nash-Gleichgewicht, wenn s_1^* beste Antwort aus s_2^* und zugleich s_2^* beste Antwort auf s_1^* ist.
- Dann ergibt sich für keine Seite ein Vorteil durch Abweichen vom Nash-Gleichgewicht.

3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

Analog für n Spieler:

- Definition: Zu einem Spiel in Normalform ist eine Strategiekombination s^* ein **Nash-Gleichgewicht**, wenn Folgendes zutrifft:

Für jeden Spieler k und für alle Vergleichsstrategien

s_k aus S_k gilt:

$$u_k(s^*) > u_k(s_k, s_{-k}^*) \text{ oder } u_k(s^*) = u_k(s_k, s_{-k}^*) .$$

3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

- Ein ***Nash-Gleichgewicht*** ist also Kandidat für eine ***optimale Strategie***.
- Abweichen von Nash-GG führt zu keiner Verbesserung des Spielergebnisses.

3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

- **Theorem (Nash 1950):** Ein ***Nash-Gleichgewicht*** existiert immer dann, wenn die Strategiemengen S_k konvexe, kompakte Teilmengen eines euklidischen Raumes und die Nutzenfunktionen u_k affin-linear sind.
- Insbesondere hat ein ***endliches Normalformenspiel*** immer ein Nash-Gleichgewicht in ***gemischten*** Strategien.

3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

- ***Nash-Gleichgewichte*** können konkret berechnet werden. Ähnlich wie Minima, Maxima bei Kurvendiskussionen. (Nobelpreis in den 90ern)
- Allerdings kann der rechnerische Aufwand erheblich sein. Die numerische Mathematik hilft.

3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

- Für unser Einsatzspiel gilt wegen

$$u_1(s_1, s_2, s_3, s_4) = \frac{1}{2} (s_2 + s_3 + s_4) - \frac{1}{2} s_1$$

- Auf jede Strategiewahl der anderen drei ist die beste Antwort des ersten Spielers immer die Wahl

$$s_1^* = e = 0.$$

- Das gilt analog für die anderen, daher ist $(0,0,0,0)$ das eindeutig bestimmte Nash-Gleichgewicht.

3. Normalform und Nash-Gleichgewicht

- In einem Spiel kann es mehrere ***Nash-Gleichgewichte*** geben.
- In diesem Falle erfordert die Suche nach der optimalen Strategie eine weitere mathematische Analyse.

Inhalt

1. Spieltheorie – interaktive Entscheidungstheorie
2. Beispiel: Das Einsatzspiel
3. Normalform und Nash-Gleichgewicht
4. Spiele in extensiver Form (Skizze)
5. Experimentelle Spieltheorie (Skizze)
6. Iterierte Spiele, evolutorische Spiele (Skizze)
7. Anwendung: Gestaltung einer Kooperation (Beispiel)

4. Spiele in extensiver Form

- Normalform: Jeder hat einen Zug und alle Züge müssen gleichzeitig erfolgen.
- Es geht jetzt darum, Spiele darzustellen, in denen mehrfach und auch nacheinander gezogen werden kann.
- Der Spielverlauf wird durch einen **Graphen** dargestellt. Es muss ein zusammenhängender Graph ohne Schleifen sein: Ein so genannter Baum!

4. Spiele in extensiver Form

- Der Spielegraph besteht aus der Menge K der **Knoten** und der Menge T der **Kanten**.
- Die Knoten mit nur einer Kante sind die **Endknoten**.
- Ein Knoten w aus K ist ausgezeichnet als **Anfangsknoten**, w gehört nicht zur Menge Z der Endknoten.
- $E = K \setminus Z$ ist die Menge der Entscheidungsknoten.
- Jedem Entscheidungsknoten v aus E ist ein Spieler $P(v)$ zugeordnet, der in v als Strategiemenge die Menge $S(v)$ der Kanten hat, die von v ausgehen.
- Die Nutzenfunktion ist eine Funktion $u: Z \rightarrow \mathbb{R}^N$.

4. Spiele in extensiver Form

- Spielverlauf!
- Wieder Nash-Gleichgewicht wohldefiniert.
- Verfeinerungen des Begriffs Nash-GG nötig. Intensive Beschäftigung der Spieltheorie mit diesem Thema.

Inhalt

1. Spieltheorie – interaktive Entscheidungstheorie
2. Beispiel: Das Einsatzspiel
3. Normalform und Nash-Gleichgewicht
4. Spiele in extensiver Form (Skizze)
5. Experimentelle Spieltheorie (Skizze)
6. Iterierte Spiele, evolutorische Spiele (Skizze)
7. Anwendung: Gestaltung einer Kooperation (Beispiel)

5. Experimentelle Spieltheorie

- Spiel 80%
 - Rationale Überlegungen ergeben, dass $x = 0$ oder $x = 1$ ***Nash-Gleichgewicht*** ist (abhängig von der Anzahl der Spieler).
 - Umfrage hat ergeben:
 - Das Resultat von typischen Spielen ist ein Durchschnitt zwischen 20 bis 40.

5. Experimentelle Spieltheorie

- Einsatzspiel:
 - Das eindeutig bestimmte Nash-Gleichgewicht ist „Nichts investieren“.
 - Die Voraussagen waren hier?

5. Experimentelle Spieltheorie

- Ultimatumspiel: Verteilung von 100 Einheiten (z.B. 100 € oder Einheiten à 1.000 €).
 - Voraussagen?
 - Das eindeutig bestimmte Nash-Gleichgewicht ist „1 anbieten“.

5. Experimentelle Spieltheorie

- Erklärungen:
 - Modelle nicht komplex genug: Zusatzüberlegungen und Kooperationen nicht berücksichtigt.
 - Handeln Menschen und andere Akteure (z.B. in der Biologie) wirklich rational? Homo Economicus.
 - Eingeschränkte Rationalität. Nicht berechenbar; Grenzen der Ermittlung; Erfahrungen; Emotionen; Normen; Altruismus; ...

- Neue Entwicklungen in Ökonomie und Soziologie !

Inhalt

1. Spieltheorie – interaktive Entscheidungstheorie
2. Beispiel: Das Einsatzspiel
3. Normalform und Nash-Gleichgewicht
4. Spiele in extensiver Form (Skizze)
5. Experimentelle Spieltheorie (Skizze)
6. Iterierte Spiele, evolutorische Spiele (Skizze)
7. Anwendung: Gestaltung einer Kooperation (Beispiel)

6. Iterierte Spiele

- Es geht um ein festes Normalformenspiel, das wiederholt gespielt wird, und bei dem die Zukunft mit einem **Diskontfaktor** δ versehen wird: $0 < \delta < 1$.
 - (Fischhändler)
- Im Falle von m „Runden“ mit den Strategiekombinationen $s(0), s(1), \dots, s(m)$ ist der Nutzen jetzt

$$u(s(0), s(1), \dots, s(m)) = u(s(0)) + \delta u(s(1)) + \delta^2 u(s(2)) + \dots + \delta^m u(s(m))$$

6. Iterierte Spiele

- Steht die Anzahl der Runden, die gespielt werden, von vornherein fest, so entstehen keine neuen Nash-Gleichgewichte. In jeder Runde wird $s(k)$ ein Nash-Gleichgewicht sein müssen, damit die ganze Folge im iterierten Spiel ein Nash-Gleichgewicht sein kann.
- Folgerung: Schachspiel ist determiniert (Zermelo 1912).
- Eine unbestimmte Anzahl von Runden, wie sie der Realität entsprechen, wird modelliert durch unendliche viele Runden.
- Ergibt viele neue (und realistische) Nash-Gleichgewichte.

6. Evolutorische Spiele

- **Populationen** treten gegeneinander an. Die verschiedenen Spezies spielen beim zufälligen Aufeinandertreffen immer dasselbe Spiel mit derselben Strategie. Spezies = Strategie.
- Im Ergebnis werden **stabile Gleichgewichtslagen** von Strategien asymptotisch angenähert. Diese können berechnet werden.
- Modellierung aus durch **Evolutionsgleichungen**. Damit Teil der dynamischen Systeme und der Theorie des Chaos.

Inhalt

1. Spieltheorie – interaktive Entscheidungstheorie
2. Beispiel: Das Einsatzspiel
3. Normalform und Nash-Gleichgewicht
4. Spiele in extensiver Form (Skizze)
5. Experimentelle Spieltheorie (Skizze)
6. Iterierte Spiele, evolutorische Spiele (Skizze)
7. Anwendung: Gestaltung einer Kooperation (Beispiel)

7. Anwendungen der Spieltheorie

Zum Beispiel:

Im Falle von ***Kooperationen***, z.B. unternehmensübergreifende Kooperationen oder Zusammenarbeit in einem Team, in einem Verein, Sozietät, etc. ... :

7. Anwendungen der Spieltheorie

Die Gestaltung (*Design*) der Partnerschaftsstruktur, insbesondere zur Förderung von

- *Einsatzbereitschaft*
- *Vertrauen* (& Vertrauen in das Verhalten der Partner)
- Normen (des Verhaltens)
- Werte

kann sich spieltheoretischer Modelle bedienen.

7. Anwendungen der Spieltheorie

In einem spieltheoretischen Modell lassen sich diese so genannten „weichen“ Faktoren, Strukturen und Attribute in Zahlen und Gleichungen gießen und dann numerisch optimieren.

7. Anwendungen: Einsatzbereitschaft

- Bei unserem „Einsatzspiel“ (welches Kooperation modelleiert) lässt sich ein **Zusatznutzen** durch **Modifikation des Modells** (also der Spielregeln, hier der Nutzenfunktion u) einbeziehen:

7. Anwendungen: Einsatzbereitschaft

- Der Nutzen (Gewinn) des Spielers 1 war in Abhängigkeit von seinem Einsatz e : $u(e) = \frac{1}{2}(s - e)$.
- Bewertet man den Zusatznutzen $Z(e)$ beim Einsatz e als $Z(e) = e$, so ist der neue Nutzen u^*
$$u^*(e) = u(e) + Z(e) = \frac{1}{2}(s - e) + e =$$
$$= \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}e + e = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}e).$$
- Also $u^*(e) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}e$ ist der **Nutzen im neuen Spiel!**

7. Anwendungen: Einsatzbereitschaft

- Dieser neue Nutzen $u^*(e) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}e$ ist maximal bei dem Einsatz von 1000 €. Beste Antwort auf s ist also 1000. Das ist die **optimale** Strategie!

In dem neuen Spiel gilt also anders als zuvor:

Die beste Entscheidung ist der Höchsteinsatz !

7. Anwendungen: Einsatzbereitschaft

- **Rationales** Entscheiden steht einem hohen Einsatz oft entgegen (wie in unserem simplen Einsatzspiel).
- Die Einsatzbereitschaft steigt beispielsweise durch
 - **Zusatznutzen** (etwa Erwerb von Know-How, gerade bei **Innovationen**)
 - **Vertrauen** (& Vertrauen in den Einsatz der Partner)
 - Gruppendruck oder Verhaltensnormen
 - Informationsstatus
 - Kulturelle Gegebenheiten, Werte

7. Anwendungen: Vertrauen

- Ähnlich kann man die positive Wirkung von **Vertrauen**, Gruppendruck etc. prinzipiell in Gleichungen ausdrücken.
- **Vertrauen** steigert die Einsatzbereitschaft.
- Kooperationen müssen daher so gestaltet werden, dass das Vertrauen gefördert wird, z.B. durch
 - Kommunikation
 - Transparenz der Ziele, Strukturen und Aktionen
 - Benutzung von Normen, Werten und kulturellen Eigenheiten

7. Anwendungen: Vertrauen

- Studien und Experimente zeigen, dass Vertrauen sich dynamisch verändert. Exper
- Diese Dynamik kann in **Evolutionsgleichungen** spieltheoretischer Modelle eingefangen werden.
- Die Analyse dieser Gleichungen führt zu Verbesserungsvorschlägen zur Struktur, also wieder:
- ***Spieltheorie ist Werkzeug zur Gestaltung von Kooperationen.***

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!



12. Juli 2007

`Martin.Schottenloher@Mathematik.Uni-Muenchen.de`

1. Spieltheorie - Einleitung

Erfolgreiche, konkrete Anwendungen in der Wirtschaft:

- **Verhandlungen** z.B. über die Verteilung von Wirtschaftsgütern (auch politische Verhandlungen)
- **Auktionen** (z.B. auch ebay)
- **Preisbildung** bei gleichartigen Produkten (Oligopol), z.B. Preisgestaltung der Mobilfontarife
- **Kartellabsprachen**
- **Kontrollrechnungen** der Regulierungsbehörden
- **Preisfluktuationen, Aktienkurse**
- **Netzwerke**